

**ACADEMIA ROMÂNĂ  
FILIALA TIMIȘOARA**

---

**ZILELE ACADEMICE TIMIȘENE**

**Ediția a VIII-a  
22-23 mai 2003**

**TIMIȘOARA, ROMÂNIA  
Simpozion**

**MATERIALE, ELEMENTE ȘI STRUCTURI  
COMPOZITE PENTRU CONSTRUCȚII  
PREZENT ȘI PERSPECTIVE**

---

---



**Editor: Corneliu BOB**

**Publicat de Editura MIRTON  
Timișoara 2003**

# Aspecte privind calculul structurilor din beton armat prin metoda time-history

## Aspects regarding designing of reinforced concrete structures with time-history method

as. dr. ing. Petru MIHAI, prof. dr. ing. Nicolae FLOREA, ș. I. dr. ing. Ioan TUNS  
UNIVERSITATEA "Gh. Asachi" IAȘI UNIVERSITATEA "TRANSILVANIA" BRAȘOV

### ABSTRACT

Time-history method impose step by step computation, results obtained in one step are used for next step. Usual, step variation for time and/or for loads it's a constant value.

For reinforced concrete elements, constant step variation offer good results for very small step only. But, in this case, time of analysis increase too much.

In this paper, the authors propose a new method to compute step variation, each step having a different value and a different sign.

### 1. INTRODUCERE

Caracterul discret al distribuției rezistențelor locale într-un corp de beton sau alt material neomogen, precum și dezvoltarea microfisurilor și a cedărilor locale, ca un proces discontinuu, sugerează utilizarea modelului cu elemente finite pentru simularea unui astfel de proces. Pentru ca modelarea cu elemente finite să fie cât mai corectă și mai apropiată de situația reală, este necesar ca discretizarea utilizată să corespundă cât mai fidel distribuției reale a componentelor structurale din corpul respectiv. Acest fapt reclamă ca dimensiunile elementelor finite să fie suficient de mici în raport cu secțiunea corpului respectiv și corelate cu dimensiunile maxime ale componentelor structurale (granule, agregate etc.). Problema nu are o rezolvare generală, ci trebuie analizată în fiecare caz în parte.

Trebuie menționat faptul că, pentru structurile din beton, s-au elaborat programe de simulare a rupei, bazate pe metodele elasto-plastice și aplicabile mediilor continue. Aceste metode, specifice corpurilor metalice, sunt mai puțin potrivite pentru beton, datorită diferențelor esențiale între macrostructura betonului și cea a metalelor. Într-o altă modalitate de abordare, Rashid Y. [1] propune o metodă de calcul pas cu pas, simulând însă procesul discontinuu de evoluție al tensiunilor și deformațiilor prin "degenerarea" elementelor finite. Acest procedeu de calcul, mai apropiat de natura fizică a betonului, a fost aplicat la studiul și proiectarea containerelor din beton precomprimat pentru centralele electrice nucleare, procedeu fiind impus de necesitatea realizării unei construcții cu grad ridicat de siguranță în exploatare. În continuare, sunt prezentate aspectele importante ale procedurii.

Dacă se consideră un element finit toroidal cu secțiune triunghiulară, fisurat în planul  $x-z$ , noile direcții  $r'$  și  $z'$  (în lungul, respectiv normal fisurii) devin direcții principale, iar elementul finit "degenerează". Referindu-ne la figura 1, matricea de elasticitate a elementului finit în sistemul de coordonate general  $rz\theta$  se va exprima în funcție de matricea de rigiditate în sistemul local  $r'z'\theta$ , prin matricea de transformare de rotație  $R$

$$D = R^T \cdot \bar{D} \cdot R$$

(1)

În continuare se introduc funcțiile de distribuție  $g(t)$  și  $e(t)$  (fig. 1), definite prin:

$$e(t) = \theta(t - t_i), \quad i=1,2,3. \quad (2)$$

$$g(t) = \theta(t) - e(t) \quad (3)$$

Aceste funcții de distribuție s-au introdus cu scopul de a marca "biografia" elementului finit respectiv. Timpul  $t$  (argumentul acestor funcții), care măsoară nivelul de solicitare exterioară, este proporțional cu intensitatea forțelor exterioare, pentru cazul încărcării statice (monotone). Timpii  $t_1, t_2, t_3$  marchează momentele la care se deformează fisurile, în trei plane distincte, pentru elementul respectiv (trei grade de "degenerare").

În relațiile (2), (3)  $\theta(t)$  este funcția treaptă a lui Heavside ( $\theta(t)=1$  pentru  $t>0$ ;  $\theta(t)=0$  pentru  $t<0$ ). Pentru  $g(t)=1$ , elementul finit este continuu, iar pentru  $g(t)=0$  este fisurat. În sistemul de coordonate local  $r'z\theta$ , coeficienții  $\bar{d}_{i,j}$  ai matricei de elasticitate  $\bar{D}$  vor fi:

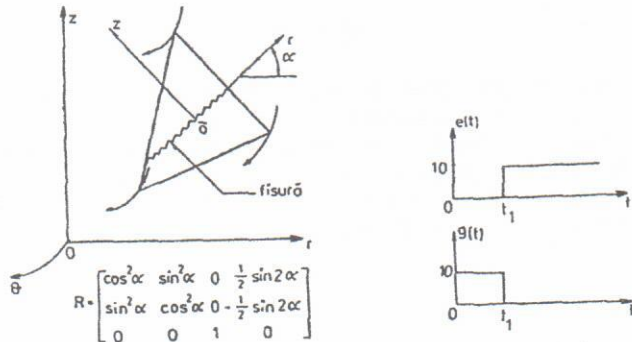


Fig. 1 - Element finit pentru modelarea betonului

$$\bar{d}_{ii} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\theta(t) - e_i(t) \cdot e_i(t)] \quad (4)$$

$$\bar{d}_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\theta(t) - e_i(t) \cdot e_j(t)], \quad (i \neq j) \quad (5)$$

unde:

➤  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  sunt funcții independente conform relației (2);

➤  $E$  și  $\nu$  sunt modulul de elasticitate, respectiv coeficientul lui Poisson.

Regrupând termenii ecuațiilor (4), (5) pentru matricea  $\bar{D}(t)$  se obține relația:

$$\bar{D}(t) = \bar{D}(0) \cdot \theta(t) - H(t) \cdot \bar{D}(0) \cdot H(t) \quad (6)$$

unde:

$$\bar{D}(0) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & e_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & e_3(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Creșterea incrementală a efortului unitar  $\bar{\sigma}$  este:

$$d\bar{\sigma} = D(t) \cdot d\bar{\varepsilon} \quad (9)$$

de unde:

$$\bar{\sigma} = \int \bar{D}(\tau) \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau \quad (10)$$

Datorită faptului că degenerarea elementului finit constituie un proces discontinuu în raport cu creșterea încărcării exterioare, care este un proces continuu, variația lui  $\bar{\sigma}$  trebuie să reflecte ambele aspecte. În acest sens, se introduce variabila de timp  $\tau$  discontinuă și independentă de  $t$ , care are semnificație numai pentru momentele discrete  $t_1, t_2, t_3$ . Din acest motiv, matricea de elasticitate  $[D]$  se va exprima în funcție de cele două variabile. Astfel, pentru  $0 < \tau \leq t$  și ținând cont de relația (1), matricea  $D$  va fi:

$$D(t, \tau) = R(t)^T \cdot \bar{D}(\tau) \cdot R(t) \quad (11)$$

Introducând relația (6) în relația (11) se obține:

$$D(t, \tau) = D(0) \cdot \theta(t) - N(t, \tau) \quad (12)$$

unde:

- $D(0)$  este matricea de elasticitate în sistemul de coordonate generale  $rz\theta$
- $N(t, \tau)$  este o matrice de rigiditate "modificantă", a cărei expresie este:

$$N(t, \tau) = R(t)^T \cdot H(\tau) \cdot D(0) \cdot H(\tau) \cdot R(t) \quad (13)$$

Rezultă expresia tensiunii  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = D_0 \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t N(t, \tau) \cdot \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau \quad (14)$$

Efectuând integrarea prin părți și aplicând regula de derivare a distribuțiilor:

$$\frac{N(t, \tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^3 N(t, t_i) \cdot \delta(t - t_i) \quad (15)$$

unde  $\delta(t-t_i)$  este funcția delta a lui Dirac, se obține în final:

$$\sigma(t) = [D_0 - N(t, t)] \cdot \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^3 N(t_i, t_i) \cdot \varepsilon(t_i) \quad (16)$$

Pentru a se obține expresia matricei de rigiditate a elementului finit, se va exprima ecuația de echilibru a elementului finit:

$$\{F(t)\}^e = [k]^e \cdot \{u(t)\}, \quad (17)$$

unde:

- $\{F(t)\}$  este vectorul forțelor din nodurile elementului finit;
- $\{u(t)\}$  este vectorul deplasărilor acestor noduri.

În final, se obține:

$$\{F(t)\} = [K_D - K_N(t, t)] \cdot \{u(t)\} - \sum_{i=1}^3 K_N(t_i, t_i) \cdot \{u(t_i)\}, \quad (18)$$

unde s-a notat:

- $K_D$  - matricea de rigiditate elastică a elementului finit;
- $K_N(t, t)$  - matricea de rigiditate "modificantă" care are expresia:

$$K_N(t, t) = \sqrt{v} B^T \cdot N(t, t) \cdot B \cdot dv \quad (19)$$

Matricele  $K_D$  și  $K_N$  se assemblează în structura generală după modelul indicat la pct. 3.3.3. Calculul se conduce pas cu pas astfel:

1. Se determină inițial pentru  $t < t_1$  deplasările și tensiunile corespunzătoare stadiului elastic ( $N(t, t) = K_N(t, t) = 0$ ).
2. Cu valorile tensiunilor se testează condiția de cedare a elementului finit, iar în cazul când aceasta survine, se recalculează tensiunile cu relația (16) și se determină expresia  $K_{N,N}(t, t)$ .
3. Se reassemblează matricea structurii și se recalculează deplasările și tensiunile.
4. Se reiau operațiile de la punctele 2 și 3, până când se obține o stare stabilă, fără elemente noi cedate; apoi se majorează treapta de încărcare și se reiau operațiile de la punctul 3.

Treptele de încărcare se succed până la atingerea încărcării totale de valoare determinată "a priori". În felul acesta se obține curba  $\sigma - \varepsilon$ , fără a se evidenția maximul curbei și nici ramura descendentă.

## 2. ALGORITMUL PROPUȘ DE AUTORI

Algoritmul descris mai sus a fost implementat de către autori în vederea modelării comportării unor grinzi din beton armat. Rezultatele sunt prezentate în fig. 2.

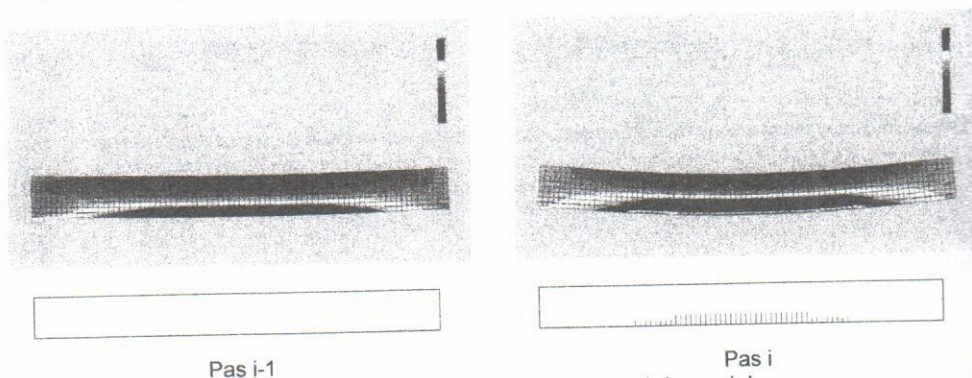


Fig. 2 – Apariția fisurilor în procesul de modelare

S-a observat că, la un anumit pas de încărcare impus ca fiind constant, apar brusc un număr mare de fisuri alăturate la distanță foarte mică, explicația constând în faptul că rezistența la întindere a betonului este depășită pe o lungime mai mare de grindă. Deoarece, în realitate apare o singură fisură, se propune implementarea unui algoritmul care să corecteze această eroare. Soluția constă în identificarea unei singure fisuri de la pasul  $i$ , prima care apare, fără ca, ulterior să mai apară și altele.

Găsirea primei fisuri se face prin mărirea sau micșorarea încărcării, după caz, până în momentul în care apare o singură fisură nouă. Algoritmul care implementează această metodă este prezentat în fig. 3. Pentru a surprinde momentul apariției fisurii de la pasul  $i$ , se va proceda astfel :

- se va aplica pasul normal de încărcare;
- dacă în urma pasului curent nu apare mai mult de o fisură, se continuă cu același pas; dacă apar mai multe fisuri se va aplica metoda înjumătățirii intervalului, până când se va găsi exact încărcarea în care apare cel mult o fisură, sau se dezvoltă

una deja existentă; încercările respective până la apariția fisurii vor fi considerate ratate și nu vor fi salvate;

- pentru a nu confunda un pas curent de încărcare în care nu apar fisuri cu un pas de încărcare pentru găsirea momentului exact de apariție a fisurilor, se folosește variabila Nr. fisuri ratate, care indică câte încercări ratate am făcut. Dacă variabila este mai mare decât zero, înseamnă că sunt într-un ciclu de încercări pentru determinarea încărcării de fisurare.

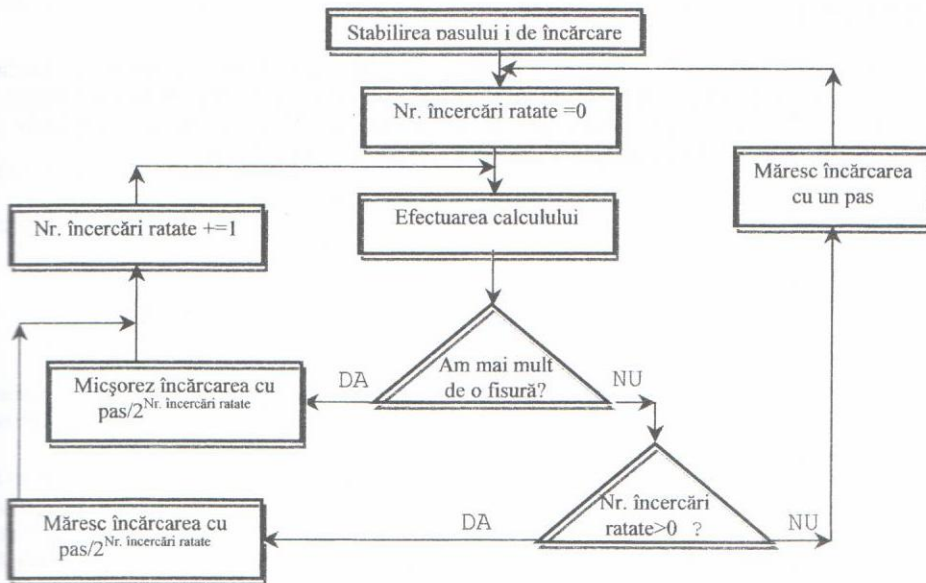


Fig. 3 – Modul de determinare a momentului apariției fisurilor

Algoritmul descris anterior presupune că, la un moment de timp  $t$ , nu poate să apară decât o singură fisură. Deoarece grinda analizată prezintă simetrie totală, teoretic, la o încărcare dată apar două fisuri simetrice. În realitate, datorită neomogenității betonului, apariția a două fisuri simultan, în aceeași fracțiune de timp, este foarte redusă din punct de vedere probabilistic, autorii considerând mult mai realistă implementarea cazului de apariție a unei singure fisuri la un moment dat.

Se face observația că, în cazul algoritmului propus, o valoare mai mică a pasului de încărcare (dar nu exagerat de mică), conduce la o mărire a vitezei de calcul și nu la o micșorare, așa cum era de așteptat. Acest fapt se justifică prin reducerea numărului de încercări ratate, convergența obținută prin metoda înjumătățirii intervalului fiind mai rapidă.

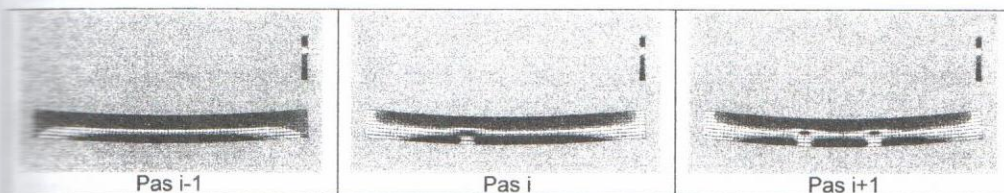


Fig. 4 – Modul real de apariție a fisurilor, obținut cu algoritmul propus

Verificarea acestui nou algoritm se stabilire a încărcărilor a condus la rezultate aflate în deplină concordanță cu situația reală, așa cum se poate observa din fig. 4.

Așa după cum se poate observa, algoritmul propus oferă rezultate corecte datorită flexibilității acestuia, astfel, pașii de încărcare având nu doar valori diferite dar chiar și semne diferite. Dacă în simulările anterioare se presupunea că încărcarea crește constant, ca într-un experiment de laborator urmărindu-se ce se întâmplă la fiecare pas, autorii implementează ca noutate absolută un procedeu de căutare a soluției corecte, accentul nemaifiind pus pe procesul de solicitare (creșterea constantă a încărcărilor) ci pe răspunsul elementului la această solicitare.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Rashid, Y.R. - *Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels*, Nuclear Engineering and Design, No. 6/1969, North-Holland Public Company, Amsterdam.
- [2] Petru MIHAI – *Contribuții la studiul caracteristicilor mecanice reziduale ale elementelor din beton armat*. Teză de doctorat. Iași, febr. 2003.